

## BÓSONS INTERAGENTES

Preliminarmente, analisamos as colisões entre duas partículas. Dentro da 1ª aproximação de Born, obtemos o resultado, para a amplitude de espalhamento:

$$f(\vec{k}', \vec{k}) = -\frac{1}{4\pi} \left( \frac{2\mu}{\hbar^2} \right) \int d\vec{x}' V(\vec{x}') e^{i(\vec{k}-\vec{k}') \cdot \vec{x}'},$$

onde  $V(r)$  é o potencial de interação e  $\mu$  é a massa reduzida. Vemos que  $f(\vec{k}', \vec{k})$  é função da transferência de momentum:

$$\vec{p} \equiv \hbar(\vec{k}-\vec{k}').$$

Assim:

$$\begin{aligned} f(\vec{p}) &= -\frac{1}{4\pi} \left( \frac{2\mu}{\hbar^2} \right) \int_0^\infty r^2 dr V(r) \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin\theta d\theta e^{i \frac{pr}{\hbar} \cos\theta} \\ &= -\frac{1}{4\pi} \left( \frac{2\mu}{\hbar^2} \right) 2\pi \int_0^\infty r^2 dr V(r) 2 \frac{\sin(pr/\hbar)}{(pr/\hbar)} \\ &= -\frac{1}{4\pi} \left( \frac{2\mu}{\hbar^2} \right) \int_0^\infty 4\pi r^2 dr V(r) \frac{\sin(pr/\hbar)}{(pr/\hbar)} \end{aligned}$$

Para potenciais de curto alcance e espalhamento de baixas energias,  $\frac{pr}{\hbar} \ll 1$  e

$$\frac{\sin(pr/\hbar)}{(pr/\hbar)} \approx 1,$$

e para a amplitude de espalhamento (independe de  $\vec{p}$ ):

$$f(\vec{p}) = -\frac{1}{4\pi} \left( \frac{2\mu}{\hbar^2} \right) \mathcal{V}_0, \quad \text{com}$$

$$\mathcal{V}_0 \equiv \int_0^\infty 4\pi r^2 dr \, V(r) = \int d\vec{x} \, V(\vec{x}) \quad (\text{o potencial precisa ser integrável}).$$

Para partículas idênticas de massa  $m$ , a massa reduzida é:

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{m}{2}.$$

Exceto pelo sinal,  $f(\vec{p})$  tem dimensão de comprimento. Lembrar que:

$|f(\vec{p})|^2 = \frac{d\sigma}{d\Omega}$ , e é a seção eficaz de espalhamento.

• Def. Comprimento de espalhamento,  $a$  ('scattering length')

$$a \equiv \frac{m}{4\pi\hbar^2} \mathcal{V}_0, \quad \mathcal{V}_0 = \int d\vec{x} \, V(\vec{x}).$$

Notar que  $a$  pode ser negativo (potencial atrativo) ou positivo (potencial repulsivo). Aqui vamos supor que

$$a > 0.$$

O mesmo resultado acima pode ser obtido, fazendo a aproximação

do pseudo-potencial (Huang & Yang, 1957):

$$V(\vec{x}-\vec{x}') = \frac{2\pi a}{(m/2)} \hbar^2 \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}') \quad (*)$$

De fato,

$$v_0 = \int d\vec{x} V(\vec{x}) = \frac{4\pi a \hbar^2}{m},$$

onde  $a$  pode ser identificado com o 'scattering length'. O pseudo-potencial (\*) pode ser pensado como derivado a partir de um potencial de esfera dura para um gás diluído, onde a distância média das partículas é muito maior que  $a$ , ou

$$a^3 \bar{n} \ll 1$$

Próxima etapa: Aperfeiçoar o Campo médio LB 1  
 para calcular o espectro das excitações de baixa energia  
 de um gás de bósons interagentes.

§2. Gas de Bose de 'Esferas duras' (melhor 'líquido').

Consideramos um gás real de Bose. O termo das interações é escrito em 2ª quantização como:

$$\mathcal{H}_I = \frac{1}{2} \int d^3x \int d^3x' \psi^\dagger(\vec{x}) \psi^\dagger(\vec{x}') V(\vec{x}-\vec{x}') \psi(\vec{x}') \psi(\vec{x})$$

Expandimos os campos em estados de ondas planas

$$\psi(\vec{x}) = \sum_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \frac{1}{\sqrt{V}} a_{\vec{k}},$$

onde os  $\vec{k}$  são obtidos das condições periódicas de contorno em uma caixa de volume  $V$ . A normalização é dada por

$$\int d^3x e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}} = V \delta_{\vec{k},\vec{k}'}$$

Expandimos  $\mathcal{H}_I$  em operadores de criação e destruição:

$$\mathcal{H}_I = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}_1} \sum_{\vec{k}_2} \sum_{\vec{k}_3} \sum_{\vec{k}_4} a_{\vec{k}_1}^\dagger a_{\vec{k}_2}^\dagger a_{\vec{k}_3} a_{\vec{k}_4} \cdot$$

$$\frac{1}{V^2} \cdot \int d^3x \int d^3x' e^{-ik_1 \cdot x} e^{-ik_2 \cdot x'} V(x-x') e^{ik_3 \cdot x'} e^{ik_4 \cdot x}$$

Precisamos avaliar a integral

$$I = \int d^3x \int d^3x' V(x-x') e^{i(k_4-k_1) \cdot x} e^{i(k_3-k_2) \cdot x'}$$

usamos a mudança de variáveis de jacobiano unitário

$$\begin{cases} \vec{p} = \vec{x} - \vec{x}' & , & \vec{x} = \vec{p} + \vec{\xi} \\ \vec{\xi} = \vec{x}' & , & \vec{x}' = \vec{\xi} \end{cases}$$

Assim

$$\begin{aligned} I &= \int d^3p \int d^3\xi V(\vec{p}) e^{i(\vec{k}_4 - \vec{k}_1) \cdot \vec{p}} e^{-i\vec{\xi} \cdot (\vec{k}_1 + \vec{k}_2 - \vec{k}_3 - \vec{k}_4)} \\ &= V \delta_{\vec{k}_1 + \vec{k}_2, \vec{k}_3 + \vec{k}_4} (2\pi)^{3/2} \mathcal{V}(\vec{k}_1 - \vec{k}_4), \end{aligned}$$

onde  $\mathcal{V}(\vec{k})$  é a transformada de Fourier de  $V(\vec{x})$ . Logo, o termo de interação pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_I &= \sum_{\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3, \vec{k}_4} \frac{1}{2V} (2\pi)^{3/2} \mathcal{V}(\vec{k}_1 - \vec{k}_4) \delta_{\vec{k}_1 + \vec{k}_2, \vec{k}_3 + \vec{k}_4} \\ &\quad + a_{\vec{k}_1}^\dagger a_{\vec{k}_2}^\dagger a_{\vec{k}_3} a_{\vec{k}_4}, \end{aligned}$$

de maneira que no Hamiltoniano (1), a constante  $G$  está ligada à transformada de Fourier

$$(2\pi)^{3/2} \mathcal{V}(\vec{k}_1 - \vec{k}_4) \rightarrow G$$

e tem dimensões [energia][volume]. Neste caso é

assumido que a transformada de Fourier é constante. A ct.  $G$  pode ser avaliada em termos dos parâmetros da esfera dura, supondo esse tipo de interação entre bósons. Consideramos apenas a situação de baixas energias (temperatura baixa):

a) No caso de baixas energias,  $kR \ll 1$ , onde  $R$  é o raio de esfera dura, o termo dominante para o espalhamento é esfericamente simétrico ( $l=0$ ), com o deslocamento de fase dado por

$$\tan \delta_0 \approx \delta_0 = -kR$$

e a amplitude de espalhamento

$$f(\vec{k}, \vec{k}') = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \frac{e^{i\delta_l} \sin \delta_l}{k} P_l(\cos \theta)$$

$$\approx \frac{e^{i\delta_0} \sin \delta_0}{k} \approx \frac{\delta_0}{k} = -R,$$

que não depende do ângulo de espalhamento  $\theta = \angle(\vec{k}, \vec{k}')$ . Para a seção eficaz, temos a fórmula

$$\sigma(\cos \theta) = |f(\vec{k}, \vec{k}')|^2 = R^2$$

e para a seção total de espalhamento

$$\sigma_T = \int_{4\pi} d\Omega \sigma(\theta, \varphi) = 4\pi R^2,$$

que é 4 vezes maior que a seção clássica. Para o caso de espalhamento por partículas idênticas tipo bósons, temos os efeitos de interferência construtiva causados pela simetrização do estado de duas partículas, com

$$f_{\text{Bósons}}(\vec{k}, \vec{k}') = 2f(\vec{k}, \vec{k}') = -2R$$

A amplitude de espalhamento  $f(\vec{k}', \vec{k})$  é definida em termos da solução assintótica da eq. de Lipmann-Schwinger

$$\langle \vec{x} | \psi^{(+)} \rangle \longrightarrow \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left[ e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} + \frac{e^{ikr}}{r} f(\vec{k}', \vec{k}) \right],$$

obtendo:

$$f(\vec{k}', \vec{k}) = -\frac{1}{4\pi} \left( \frac{2m}{\hbar^2} \right) \int d^3x' V(\vec{x}') e^{-i\vec{k}' \cdot \vec{x}'} (2\pi)^{3/2} \psi^{(+)}(\vec{x}').$$

Na aproximação de mais baixa ordem:

$$\psi^{(+)}(\vec{x}') \longrightarrow \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}'},$$

de maneira que

$$\begin{aligned} f^{(0)}(\vec{k}', \vec{k}) &\longrightarrow -\frac{1}{4\pi} \left( \frac{2m}{\hbar^2} \right) \int d^3x' V(\vec{x}') e^{-i(\vec{k}' - \vec{k}) \cdot \vec{x}'} \\ &= -\frac{1}{4\pi} \left( \frac{2m}{\hbar^2} \right) (2\pi)^{3/2} \mathcal{V}(\vec{k}' - \vec{k}) \\ &= -R \quad (\text{resultado dos 'phase shifts'}). \end{aligned}$$

Obtemos o resultado:

$$(2\pi)^{3/2} \mathcal{V}(\vec{k}' - \vec{k}) = 4\pi \left( \frac{\hbar^2}{2m} \right) R \longrightarrow G,$$

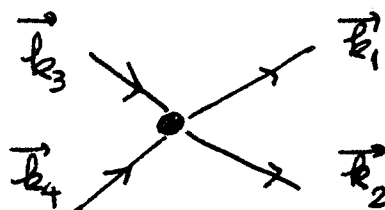
de maneira que a constante de acoplamento  $G$  da teoria fica

$$G = 2\pi R \left( \frac{\hbar^2}{m} \right).$$

Consideramos o estado de momentum nulo como tendo ocupação macroscópica. Supomos que  $(a_0, a_0^\dagger)$  comutam e podem ser substituídos por números

$$a_0, a_0^\dagger \rightarrow \sqrt{N_0}$$

O Hamiltoniano de interação é expandido retendo os termos dominantes em  $N_0^2$  e  $N_0$ . Notamos que os processos de espalhamento entre bósons idênticos conservam o momentum



com  $\vec{k}_1 + \vec{k}_2 = \vec{k}_3 + \vec{k}_4$ , de maneira que não existem termos com  $N_0^{3/2}$ , por exemplo.

i) Termos de ordem  $N_0^2$ :

$$a_{\vec{k}_1}^\dagger a_{\vec{k}_2}^\dagger a_{\vec{k}_3} a_{\vec{k}_4} \rightarrow a_0^\dagger a_0^\dagger a_0 a_0 \rightarrow N_0^2$$

ii) Termos de ordem  $N_0$ :

$$\left. \begin{array}{l} a_{\vec{k}}^\dagger a_0^\dagger a_{\vec{k}} a_0 \\ a_{\vec{k}}^\dagger a_0^\dagger a_0 a_{\vec{k}} \\ a_0^\dagger a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} a_0 \\ a_0^\dagger a_{\vec{k}}^\dagger a_0 a_{\vec{k}} \end{array} \right\} \rightarrow 4 N_0 a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}}$$



$$a_k^+ a_{-k}^+ a_0 a_0 \rightarrow N_0 a_k^+ a_{-k}^+$$

$$a_0^+ a_0^+ a_k a_{-k} \rightarrow N_0 a_k a_{-k}$$

Introduzindo o símbolo  $\sum_{\vec{k}}'$  que exclue o estado com

$\vec{k}=0$ , e simetrizando em  $\vec{k}$  e  $-\vec{k}$ , o Hamiltoniano de interação pode ser escrito como:

$$\mathcal{H}_I \approx \frac{G}{2V} \left[ N_0^2 + 2N_0 \sum_{\vec{k}}' (a_k^+ a_k + a_{-k}^+ a_{-k}) + N_0 \sum_{\vec{k}}' (a_k^+ a_{-k}^+ + a_k a_{-k}) \right].$$

O operador número é dado por:

$$\hat{N} = N_0 + \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}}' (a_k^+ a_k + a_{-k}^+ a_{-k}).$$

Tomando médias sobre o estado fundamental temos

$$N = \langle \hat{N} \rangle = N_0 + \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}}' \langle a_k^+ a_k + a_{-k}^+ a_{-k} \rangle,$$

e sabemos que a flutuação do número é muito pequena

$$N - N_0 = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}}' \langle a_k^+ a_k + a_{-k}^+ a_{-k} \rangle \ll N$$

Fazemos a substituição:

$$N_0 = \hat{N} - \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} (a_{\mathbf{k}}^{\dagger} a_{\mathbf{k}} + a_{-\mathbf{k}}^{\dagger} a_{-\mathbf{k}})$$

guardando termos até de ordem  $N$ , e negligenciando as flutuações. Temos:

$$N_0^2 \approx \hat{N}^2 - \hat{N} \sum_{\mathbf{k}} (a_{\mathbf{k}}^{\dagger} a_{\mathbf{k}} + a_{-\mathbf{k}}^{\dagger} a_{-\mathbf{k}})$$

$$\begin{aligned} e^{-\frac{G}{2V} N_0^2} &\rightarrow e^{-\frac{G}{2V} \hat{N}^2 - \frac{G}{2V} \hat{N} \sum_{\mathbf{k}} (a_{\mathbf{k}}^{\dagger} a_{\mathbf{k}} + a_{-\mathbf{k}}^{\dagger} a_{-\mathbf{k}})} \\ &= e^{-\frac{1}{2} G n^2 V} e^{-\frac{1}{2} G n \sum_{\mathbf{k}} (a_{\mathbf{k}}^{\dagger} a_{\mathbf{k}} + a_{-\mathbf{k}}^{\dagger} a_{-\mathbf{k}})} \end{aligned}$$

com  $n = N/V$ .

Em total:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_I &= \frac{1}{2} G n^2 V + \frac{1}{2} G n \sum_{\mathbf{k}} (a_{\mathbf{k}}^{\dagger} a_{\mathbf{k}} + a_{-\mathbf{k}}^{\dagger} a_{-\mathbf{k}}) \\ &\quad + \frac{1}{2} G n \sum_{\mathbf{k}} (a_{\mathbf{k}}^{\dagger} a_{-\mathbf{k}}^{\dagger} + a_{\mathbf{k}} a_{-\mathbf{k}}). \end{aligned}$$

Para o Hamiltoniano livre temos

$$\mathcal{H}_0 = \sum_{\mathbf{k}} \epsilon_{\mathbf{k}}^{(0)} a_{\mathbf{k}}^{\dagger} a_{\mathbf{k}} =$$

$$= \epsilon_0^{(0)} a_0^\dagger a_0 + \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}}' \epsilon_{\vec{k}}^{(0)} (a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} + a_{-\vec{k}}^\dagger a_{-\vec{k}}),$$

onde temos assumido que  $\epsilon_{-\vec{k}}^{(0)} = \epsilon_{\vec{k}}^{(0)}$

$$\mathcal{H}_0 \approx \epsilon_0^{(0)} V n + \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}}' \epsilon_{\vec{k}}^{(0)} (a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} + a_{-\vec{k}}^\dagger a_{-\vec{k}}),$$

de maneira que o Hamiltoniano completo pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \frac{1}{2} G n^2 V + \epsilon_0^{(0)} V n + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}}' (\epsilon_{\vec{k}}^{(0)} + G n) (a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} + a_{-\vec{k}}^\dagger a_{-\vec{k}}) \\ & + \frac{1}{2} G n \sum_{\vec{k}}' (a_{\vec{k}}^\dagger a_{-\vec{k}}^\dagger + a_{\vec{k}} a_{-\vec{k}}) \end{aligned} \quad (2)$$

Se a relação de dispersão é do tipo de partícula livre:

$$\epsilon_{\vec{k}}^{(0)} = \frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m},$$

então  $\epsilon_0^{(0)} = 0$ . Vamos supor que este é o caso para eliminar uma constante no Hamiltoniano (2).

c) Diagonalização do Hamiltoniano (2)

No Hamiltoniano de interação temos acoplamento entre os modos  $\vec{k}$  e  $-\vec{k}$ . Isto sugere uma transformação linear da forma:

$$\begin{cases} a_{\vec{k}} \equiv u_k a_{\vec{k}} - v_k a_{-\vec{k}}^{\dagger}, \\ a_{-\vec{k}}^{\dagger} \equiv u_k a_{\vec{k}}^{\dagger} - v_k a_{-\vec{k}}, \end{cases}$$

onde assumimos os coeficientes  $(u_k, v_k)$  como sendo reais com

$$\begin{aligned} u_{-\vec{k}} &= u_{|\vec{k}|} \equiv u_k \\ v_{-\vec{k}} &= v_{|\vec{k}|} \equiv v_k \end{aligned}$$

A transformação que envolve os mesmos operadores é

$$\begin{cases} a_{\vec{k}} = u_k a_{\vec{k}} - v_k a_{-\vec{k}}^{\dagger}, \\ a_{-\vec{k}}^{\dagger} = u_k a_{\vec{k}}^{\dagger} - v_k a_{-\vec{k}}, \end{cases}$$

e matricialmente:

$$\begin{pmatrix} a_{\vec{k}} \\ a_{-\vec{k}}^{\dagger} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_k & -v_k \\ -v_k & u_k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{\vec{k}} \\ a_{-\vec{k}}^{\dagger} \end{pmatrix}$$

Esta transformação pode ser invertida. Assumimos que o determinante da transformação é unitário

$$\det \begin{pmatrix} u_k & -v_k \\ -v_k & u_k \end{pmatrix} = u_k^2 - v_k^2 = 1$$

Assim a transformação inversa é:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{\vec{k}} \\ \alpha_{-\vec{k}}^{\dagger} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_k & v_k \\ v_k & u_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{\vec{k}} \\ a_{-\vec{k}}^{\dagger} \end{pmatrix}$$

Mostremos que a transformação preserva as relações de comutação:

$$\begin{aligned} [\alpha_{\vec{k}}, \alpha_{\vec{k}'}^{\dagger}] &= [u_k a_{\vec{k}} + v_k a_{-\vec{k}}^{\dagger}, u_{k'} a_{\vec{k}'} + v_{k'} a_{-\vec{k}'}^{\dagger}] \\ &= u_k u_{k'} \underbrace{[a_{\vec{k}}, a_{\vec{k}'}^{\dagger}]}_{\delta_{\vec{k}, \vec{k}'}} + v_k v_{k'} \underbrace{[a_{-\vec{k}}^{\dagger}, a_{-\vec{k}'}^{\dagger}]}_{-\delta_{\vec{k}, \vec{k}'}} \\ &= (u_k^2 - v_k^2) \delta_{\vec{k}, \vec{k}'} = \delta_{\vec{k}, \vec{k}'} \end{aligned}$$

Também:

$$\begin{aligned} [\alpha_{-\vec{k}}^{\dagger}, \alpha_{-\vec{k}'}^{\dagger}] &= [u_k a_{\vec{k}} + v_k a_{-\vec{k}}^{\dagger}, u_{k'} a_{\vec{k}'} + v_{k'} a_{-\vec{k}'}^{\dagger}] \\ &= u_k v_{k'} [a_{\vec{k}}, a_{-\vec{k}'}^{\dagger}] + u_{k'} v_k [a_{-\vec{k}}^{\dagger}, a_{\vec{k}'}] \end{aligned}$$

$$= u_k v_k \delta_{\vec{k}, -\vec{k}} - u_k v_k \delta_{\vec{k}, -\vec{k}} = 0,$$

onde temos usado a propriedade  $u_{-\vec{k}} = u_k = u_{|\vec{k}|}$ .  
Substituímos a transformação no Hamiltoniano (2):

$$\begin{aligned} a_k^\dagger a_k &= (u_k \alpha_k^\dagger - v_k \alpha_{-k}) (u_k \alpha_k - v_k \alpha_{-k}^\dagger) \\ &= u_k^2 \alpha_k^\dagger \alpha_k + v_k^2 \alpha_{-k} \alpha_{-k}^\dagger - u_k v_k \alpha_k^\dagger \alpha_{-k}^\dagger \\ &\quad - u_k v_k \alpha_{-k} \alpha_k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{-k}^\dagger a_{-k} &= u_k^2 \alpha_{-k}^\dagger \alpha_{-k} + v_k^2 \alpha_k \alpha_k^\dagger - u_k v_k \alpha_{-k}^\dagger \alpha_k^\dagger \\ &\quad - u_k v_k \alpha_k \alpha_{-k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_k a_{-k} &= (u_k \alpha_k - v_k \alpha_{-k}^\dagger) (u_k \alpha_{-k} - v_k \alpha_k^\dagger) \\ &= u_k^2 \alpha_k \alpha_{-k} + v_k^2 \alpha_{-k}^\dagger \alpha_k^\dagger - u_k v_k \alpha_k \alpha_k^\dagger \\ &\quad - u_k v_k \alpha_{-k}^\dagger \alpha_{-k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_k^\dagger a_{-k}^\dagger &= u_k^2 \alpha_k^\dagger \alpha_{-k}^\dagger + v_k^2 \alpha_{-k} \alpha_k - u_k v_k \alpha_k^\dagger \alpha_k \\ &\quad - u_k v_k \alpha_{-k} \alpha_{-k}^\dagger \end{aligned}$$

Colocando os operadores em ordem normal:

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad a_k^+ a_k + a_{-k}^+ a_{-k} &= u_k^2 (\alpha_k^+ \alpha_k + \alpha_{-k}^+ \alpha_{-k}) + 2v_k^2 \\
 &\quad + v_k^2 (\alpha_k^+ \alpha_k + \alpha_{-k}^+ \alpha_{-k}) - 2u_k v_k (\alpha_k^+ \alpha_{-k}^+ + \alpha_k \alpha_{-k}) \\
 &= 2v_k^2 + (u_k^2 + v_k^2) (\alpha_k^+ \alpha_k + \alpha_{-k}^+ \alpha_{-k}) - 2u_k v_k (\alpha_k^+ \alpha_{-k}^+ + \alpha_k \alpha_{-k}) \\
 \bullet \quad a_k^+ a_{-k}^+ + a_k a_{-k} &= -2u_k v_k - 2u_k v_k (\alpha_k^+ \alpha_k + \alpha_{-k}^+ \alpha_{-k}) \\
 &\quad + (u_k^2 + v_k^2) (\alpha_k^+ \alpha_{-k}^+ + \alpha_k \alpha_{-k})
 \end{aligned}$$

Escrevemos o Hamiltoniano (2) em termo dos operadores  $(\alpha, \alpha^+)$ :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H} &= \frac{1}{2} G n^2 V + \sum_{\mathbf{k}}' \left[ v_k^2 (\epsilon_k^{(0)} + G n) - u_k v_k G n \right] + \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}}' \left[ (u_k^2 + v_k^2) (\epsilon_k^{(0)} + G n) - 2u_k v_k G n \right] \times \\
 &\quad \quad \quad \times (\alpha_k^+ \alpha_k + \alpha_{-k}^+ \alpha_{-k}) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}}' \left[ (u_k^2 + v_k^2) G n - 2u_k v_k (\epsilon_k^{(0)} + G n) \right] \times \\
 &\quad \quad \quad \times (\alpha_k^+ \alpha_{-k}^+ + \alpha_k \alpha_{-k})
 \end{aligned}$$

Neste ponto, existem várias possibilidades para a diagonalização completa. Adotamos o tratamento

variacional. Calculamos a energia do estado fundamental. Ele é procurado como o vácuo dos novos operadores  $\alpha_{\vec{k}}$ :

$$\alpha_{\vec{k}} |0\rangle = 0, \text{ para todo } \vec{k}.$$

Seja:

$$W = \langle 0 | \mathcal{H} | 0 \rangle = \frac{1}{2} G n^2 V + \sum_{\vec{k}}' \left[ v_k^2 (\epsilon_k^{(0)} + G n) - u_k v_k G n \right],$$

onde supomos que  $\langle 0 | 0 \rangle = 1$ . Lembramos que os coeficientes  $(u_k, v_k)$  satisfazem as condições

$$u_k^2 - v_k^2 = 1, \text{ para todo } \vec{k} \neq 0.$$

Assim, minimizamos o funcional:

$$F = W + \sum_{\vec{k}}' \lambda_k (u_k^2 - v_k^2)$$

$$F = \frac{1}{2} G n^2 V + \sum_{\vec{k}}' \left[ v_k^2 (\epsilon_k^{(0)} + G n) - u_k v_k G n \right] + \sum_{\vec{k}}' \lambda_k (u_k^2 - v_k^2),$$

onde os  $\lambda_{\vec{k}}$  são os multiplicadores de Lagrange associados com a condição  $u_k^2 - v_k^2 = 1$ .



$$I) \frac{\partial F}{\partial u_k} = 0 = -Gn v_k + 2\lambda_k u_k$$

$$II) \frac{\partial F}{\partial v_k} = 0 = 2v_k(\epsilon_k^{(0)} + Gn) - u_k Gn - 2\lambda_k v_k$$

obtemos as equações lineares homogêneas para  $(u_k, v_k)$

$$\begin{cases} -2\lambda_k u_k + Gn v_k = 0 \\ -Gn u_k + 2(\epsilon_k^{(0)} + Gn - \lambda_k) v_k = 0 \end{cases} \quad (4)$$

As eqs. (4) só tem solução não trivial quando o determinante do sistema é nulo:

$$0 = \begin{vmatrix} -2\lambda_k & Gn \\ -Gn & 2(\epsilon_k^{(0)} + Gn) - 2\lambda_k \end{vmatrix} =$$

$$= 4\lambda_k^2 - 4\lambda_k(\epsilon_k^{(0)} + Gn) + (Gn)^2$$

ou

$$\lambda^2 - \lambda(\epsilon_k^{(0)} + Gn) + (Gn)^2/4 = 0,$$

que é a equação para os autovalores

Soluções:

$$\lambda_{\pm} = \frac{\epsilon_k^{(0)} + Gn}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\epsilon_k^{(0)} + Gn)^2 - (Gn)^2}$$

Da 1ª equação de (4) temos:

$$v_k = \frac{2\lambda_k}{Gn} u_k$$

Os sinais das soluções  $\lambda_{\pm}$  são decididos tomando o limite de altas energias. Como os processos de espalhamento implicam baixas energias, esperamos que as quasipartículas se comportem como partículas livres no limite de altas energias. Assim para  $\epsilon_k^{(0)} \rightarrow \infty$ , devemos ter  $u_k \rightarrow 1$ ,  $v_k \rightarrow 0$  (notar que  $(u, v)$  não podem ser simultaneamente nulos porque  $u^2 - v^2 = 1$ ).

Das expressões de acima temos:

$$\begin{aligned} v_k &= \frac{\epsilon_k^{(0)} + Gn \pm \sqrt{\epsilon_k^{(0)2} + 2\epsilon_k^{(0)}Gn}}{Gn} \\ &= \frac{\epsilon_k^{(0)} + Gn \pm \epsilon_k^{(0)} \sqrt{1 + 2Gn/\epsilon_k^{(0)}}}{Gn} \\ &\underset{\epsilon \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\epsilon_k^{(0)} + Gn \pm \epsilon_k^{(0)} (1 + Gn/\epsilon_k^{(0)})}{Gn} \end{aligned}$$

com  $v_k \rightarrow 0$ , só para  $\lambda_-$ . A solução é

$$\lambda_k = \frac{\epsilon_k^{(0)} + G_n}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\epsilon_k^{(0)} + G_n)^2 - (G_m)^2}$$

Das eqs. (4), multiplicando a primeira por  $v_k$  e a segunda por  $u_k$ , e tirando a 2ª da 1ª, obtemos:

$$(4) \quad \begin{cases} -2\lambda_k u_k v_k + G_n v_k^2 = 0 \\ -G_n u_k^2 + 2(\epsilon_k^{(0)} + G_n - \lambda_k) u_k v_k = 0 \end{cases}$$

$$0 = G_n(u_k^2 + v_k^2) - 2u_k v_k (\epsilon_k^{(0)} + G_n), \quad (5)$$

de maneira que o termo não diagonal de (3) cancela-se automaticamente (ou seja, diagonalização!). A relação  $u^2 - v^2 = 1$ , sugere a parametrização:

$$u_k = \cosh \varphi_k, \quad v_k = \sinh \varphi_k,$$

Com a relação

$$\tanh 2\varphi_k = \frac{2 \tanh \varphi_k}{1 + \tanh^2 \varphi_k} = \frac{2 u_k v_k}{u_k^2 + v_k^2}$$

$$-1 \leq \tanh 2\varphi_k = \frac{G_n}{\epsilon_k^{(0)} + G_n} \leq 1$$

Esta última equação só tem solução em geral para  $G > 0$ . Só falta avaliar a energia das quase-partículas  $E_k$ . Da expressão do Hamiltoniano (3) temos:

$$E_k = (u_k^2 + v_k^2)(\epsilon_k^{(0)} + Gn) - 2u_k v_k Gn$$

Somando as duas eqs. de (4') obtemos

$$-Gn \underbrace{(u_k^2 - v_k^2)}_1 + 2u_k v_k (\epsilon_k^{(0)} + Gn - 2\lambda_k) = 0,$$

o que fornece  $2u_k v_k = \frac{Gn}{\epsilon_k^{(0)} + Gn - 2\lambda_k}$ ,

logo

$$u_k^2 + v_k^2 = \frac{\epsilon_k^{(0)} + Gn}{Gn} 2u_k v_k = \frac{\epsilon_k^{(0)} + Gn}{\epsilon_k^{(0)} + Gn - 2\lambda_k}$$

e substituindo em  $E_k$  da':

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{(\epsilon_k^{(0)} + Gn)^2}{\epsilon_k^{(0)} + Gn - 2\lambda_k} - \frac{(Gn)^2}{\epsilon_k^{(0)} + Gn - 2\lambda_k} \\ &= \frac{(\epsilon_k^{(0)} + Gn)^2 - (Gn)^2}{\epsilon_k^{(0)} + Gn - 2\lambda_k} \end{aligned}$$

e finalmente:

$$\epsilon_k^{(0)} + Gn - 2\lambda_k = \sqrt{(\epsilon_k^{(0)} + Gn)^2 - (Gn)^2},$$

e a relação de dispersão para as quase-partículas:

$$E_k = \sqrt{(\epsilon_k^{(0)} + Gn)^2 - (Gn)^2} \quad (6)$$

d) Para a energia do estado fundamental e para o cálculo do número  $(N - N_0)/N$  precisamos de  $v_k^2$ .

Temos as equações:

$$\begin{cases} u_k^2 + v_k^2 = \frac{\epsilon_k^{(0)} + Gn}{E_k} \\ u_k^2 - v_k^2 = 1 \end{cases},$$

que fornecem

$$2v_k^2 = \frac{\epsilon_k^{(0)} + Gn}{E_k} - 1$$

Para o estado fundamental:

$$\begin{aligned} v_k^2 (\epsilon_k^{(0)} + Gn) - u_k v_k Gn &= (\epsilon_k^{(0)} + Gn) \frac{(\epsilon_k^{(0)} + Gn - E_k)}{2E_k} \\ - \frac{(Gn)^2}{2E_k} &= \frac{(\epsilon_k^{(0)} + Gn)^2 - (Gn)^2 - E_k (\epsilon_k^{(0)} + Gn)}{2E_k} \end{aligned}$$

In[1]:=

$$\text{pvk}[x_] = \frac{1+x}{2\sqrt{1+2x}} - 1/2$$

$$\text{Out}[1] = -\frac{1}{2} + \frac{1+x}{2\sqrt{1+2x}}$$

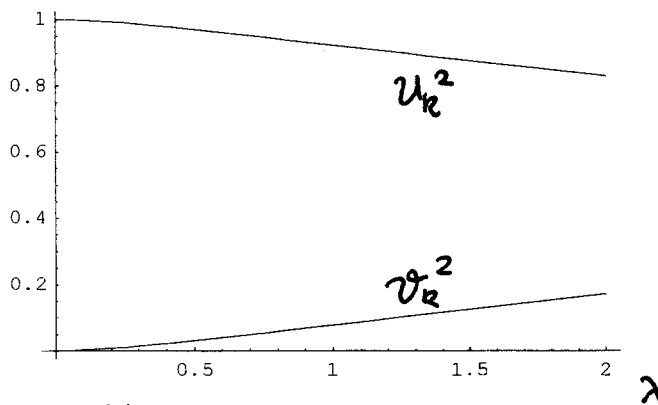
In[3]:=

$$\text{puk}[x_] = 1 - \text{pvk}[x]$$

$$\text{Out}[3] = \frac{3}{2} - \frac{1+x}{2\sqrt{1+2x}}$$

In[9]:=

Plot[{pvk[x], puk[x]}, {x, 0.0, 2.0}]



Out[9]= - Graphics -

$$\lambda \equiv \frac{G\gamma}{\mathcal{E}_R^{(0)}}$$

$$= \frac{E_k - (\epsilon_k^{(0)} + G_n)}{2}$$

e para  $E_0 = \langle 0 | \mathcal{H} | 0 \rangle$

$$E_0 = \frac{1}{2} G n^2 V - \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}}' [\epsilon_k^{(0)} + G_n - E_k] \quad (7)$$

que diverge sem a introdução de um "cutoff" no espaço  $\mathbf{k}$ .

Temos:

$$\begin{aligned} \hat{N} &= N_0 + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}}' (a_{\mathbf{k}}^+ a_{\mathbf{k}} + a_{-\mathbf{k}}^+ a_{-\mathbf{k}}) \\ &= N_0 + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}}' \left[ 2v_{\mathbf{k}}^2 + (u_{\mathbf{k}}^2 + v_{\mathbf{k}}^2) (\alpha_{\mathbf{k}}^+ \alpha_{\mathbf{k}} + \alpha_{-\mathbf{k}}^+ \alpha_{-\mathbf{k}}) - \right. \\ &\quad \left. - 2u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}} (\alpha_{\mathbf{k}}^+ \alpha_{-\mathbf{k}}^+ + \alpha_{\mathbf{k}}^- \alpha_{-\mathbf{k}}^-) \right] \end{aligned}$$

e tomando médias com o estado fundamental:

$$N = \langle \hat{N} \rangle = \langle 0 | \hat{N} | 0 \rangle = N_0 + \sum_{\mathbf{k}}' v_{\mathbf{k}}^2$$

ou

$$\frac{N - N_0}{N} = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}}' v_{\mathbf{k}}^2 = \frac{1}{2N} \sum_{\mathbf{k}}' \left[ \frac{\epsilon_k^{(0)} + G_n}{E_k} - 1 \right]$$

que sim é finito. Tomando o limite contínuo obtemos

$$\frac{N - N_0}{N} = \frac{V}{2N} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left( \frac{\epsilon_k^{(0)} + G_n}{\epsilon_k} - 1 \right)$$

$$= \frac{V}{2N} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left\{ \frac{1 + \epsilon_k^{(0)}/G_n}{\sqrt{\frac{\epsilon_k^{(0)2}}{(G_n)^2} + 2 \frac{\epsilon_k^{(0)}}{G_n}}} - 1 \right\}$$

$$\frac{\epsilon_k^{(0)}}{G_n} = \frac{\hbar^2}{2mG_n} k^2 \equiv x^2$$

$$\Rightarrow k = \frac{(2mG_n)^{1/2}}{\hbar} x$$

$$k^2 dk = \frac{(2mG_n)^{3/2}}{\hbar^3} x^2 dx$$

Temos:

$$\frac{N - N_0}{N} = \frac{V}{2N} \frac{1}{(2\pi)^3} 4\pi \int_0^\infty k^2 dk \left\{ \frac{1 + x^2}{\sqrt{x^4 + 2x^2}} - 1 \right\}$$

$$= \frac{V}{2N} \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \frac{(2mG_n)^{3/2}}{\hbar^3} \int_0^\infty x^2 dx \left\{ \frac{1 + x^2}{\sqrt{x^4 + 2x^2}} - 1 \right\}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2 n} \frac{(2mG_n)^{3/2}}{\hbar^3} I,$$

com  $I = \frac{\sqrt{2}}{3}$  (ver cálculo anexo com o "Mathematica")



In[1]:=

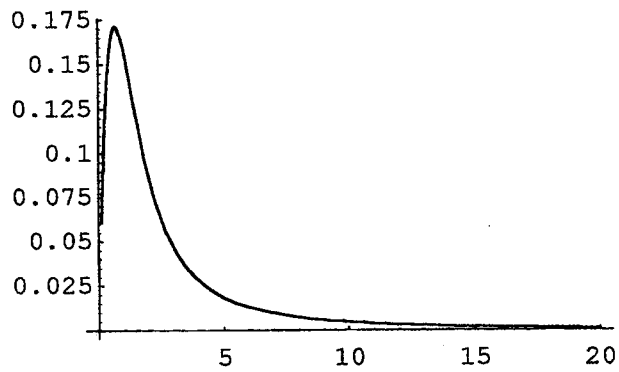
f[x\_]:=x^2(-1+(1+x^2)/Sqrt[x^4+2 x^2])

Out[1]=

$$x^2 \left( -1 + \frac{1 + x^2}{\sqrt{2x^2 + x^4}} \right)$$

In[2]:=

Plot[f[x], {x, 0.1, 20}]



Out[2]=

-Graphics-

In[4]:=

Integrate[f[x], {x, 0, Infinity}]

Out[4]=

$\frac{\sqrt{2}}{3}$

3

e) O Hamiltoniano (3) na forma diagonal fica

$$\mathcal{H} = E_0 + \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}}' E_{\vec{k}} \left( \alpha_{\vec{k}}^{\dagger} \alpha_{\vec{k}} + \alpha_{-\vec{k}}^{\dagger} \alpha_{-\vec{k}} \right)$$

com 
$$E_{\vec{k}} = \sqrt{(E_{\vec{k}}^{(0)} + Gn)^2 - (Gn)^2}$$
.

Se 
$$E_{\vec{k}}^{(0)} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$
, temos

$$E_{\vec{k}} = \sqrt{E_{\vec{k}}^{(0)2} + 2Gn E_{\vec{k}}^{(0)}} = \sqrt{\frac{\hbar^4}{4m^2} k^4 + \frac{\hbar^2 Gn}{m} k^2}$$

i) Para baixas energias,  $kR \ll 1$ , domina o termo em  $k^2$ :

$$k \approx 0, \quad E_k \approx \hbar \left( \frac{Gn}{m} \right)^{1/2} k,$$

que é característico de uma onda de som com velocidade

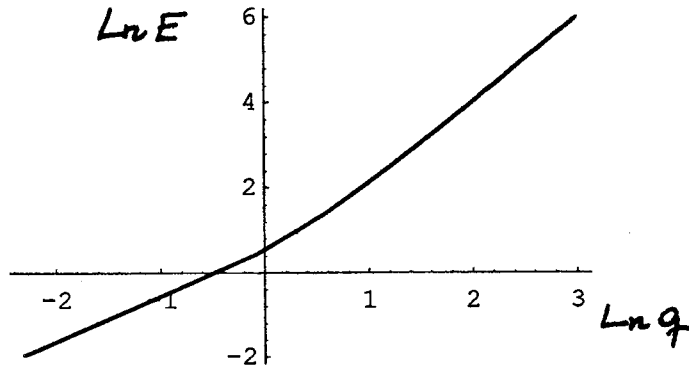
$$v = \left( \frac{Gn}{m} \right)^{1/2}$$

ii) Para altas energias,  $k \rightarrow \infty$ , domina o termo em  $k^4$ , e

$$E_k \underset{k \rightarrow \infty}{\approx} \frac{\hbar^2}{2m} k^2, \quad \text{tipo partícula livre.}$$

In[2]:=

```
ParametricPlot[{Log[x], h[x]}, {x, 0.1, 20.}]
```



Out[2]=

-Graphics-

Grafico de Log[E(q)/Gn] v.s. Log(q)

-Graphics-

Grafico de Log [E(k)/Gn] v.s Log(k)

```
Plot[g[x], {x, 0.1, 20}]
```

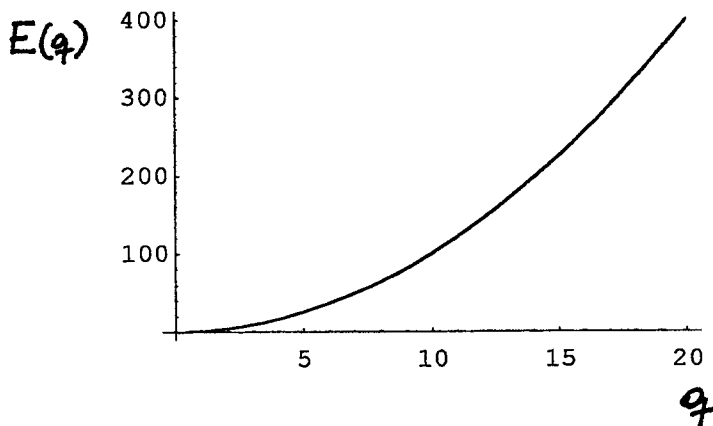


Grafico de E(k) v.s. k

```
s[x_]=If[x<2, 1, 0]
```

```
If[x < 2, 1, 0]
```

► Def :

$$q \equiv \frac{\hbar}{(2mGn)^{1/2}} k, \quad q^2 = \frac{E_k^{(0)}}{Gn} = \frac{\hbar^2}{2mGn} k^2$$

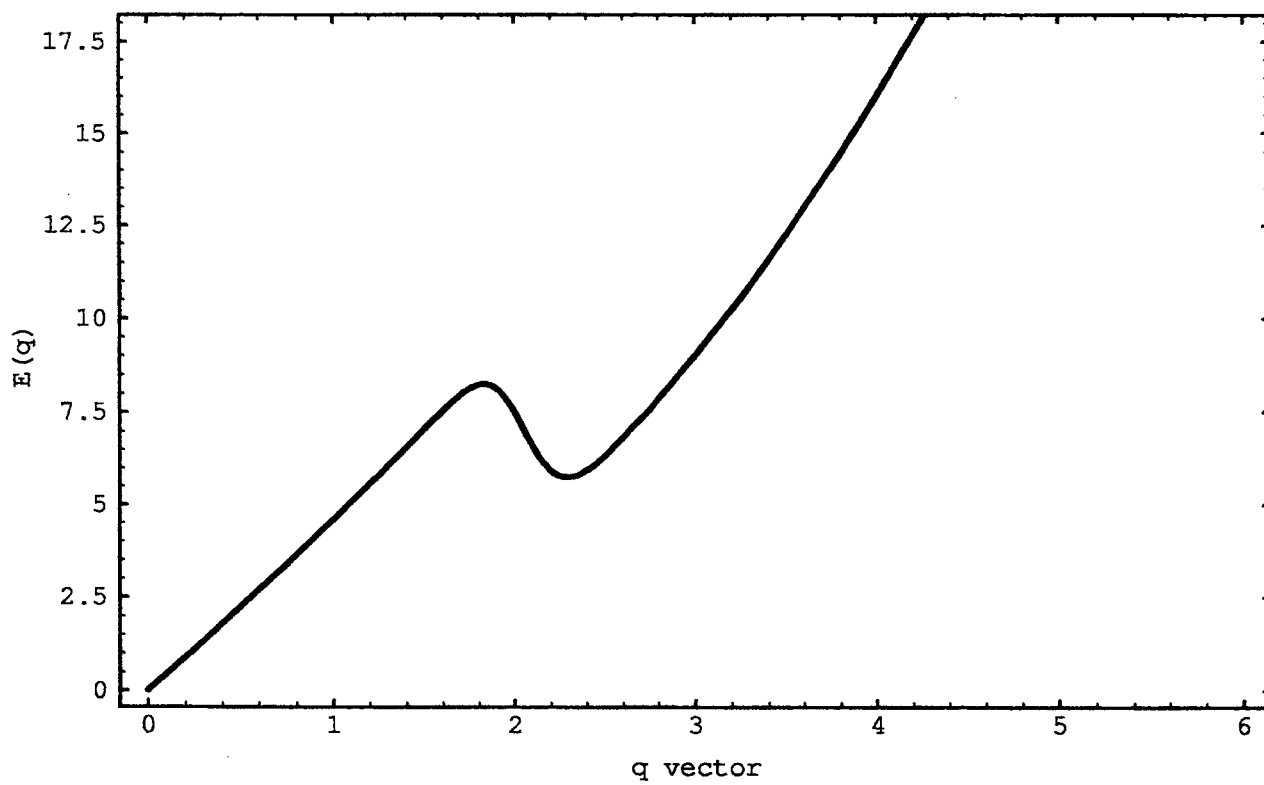
$$\frac{E_k}{Gn} = \sqrt{\frac{E_k^{(0)2}}{(Gn)^2} + 2 \frac{E_k^{(0)}}{Gn}} = \sqrt{q^4 + 2q^2}$$

Dos gráficos em anexo, vemos que a passagem do regime de fônons para o de partícula livre se dá suavemente, sem nenhum mínimo no espectro. Experimentalmente, observa-se um mínimo associado com excitações características dos superfluidos chamadas de "rôtons". Na teoria de Bogolubov, a contribuição de rôtons está ausente, mas a teoria tem o grande mérito de prever "ondas de som" como excitações de mais baixa energia. A parte de rôton pode ser re-obtida, lembrando que existe um cutoff para a constante  $G$ , como mostrado neste mesmo problema.

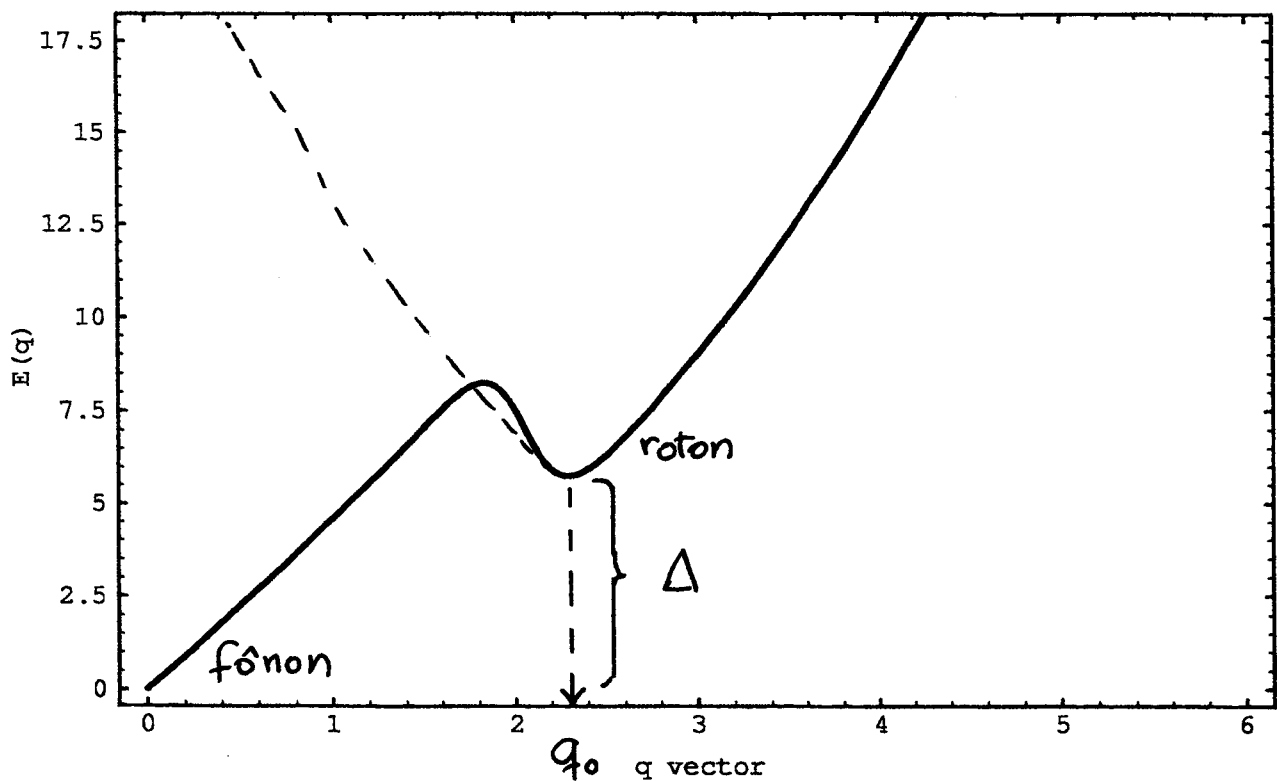
O cutoff mais simples é introduzido como uma função degrau, o que já mostra a assinatura característica dos rôtons (ver gráfico em anexo) [redacted]. Finalmente, se o corte não é feito com uma função degrau, mas esta varia suavemente em torno do cutoff, obtemos o espectro característico das excitações de um superfluido (ver gráfico na pag [redacted] LB 29 e 30).

### Referências

- L. D. Landau, J. Phys. USSR 5, 71 (1941) [JETP 11, 592 "The Theory of Superfluidity of Helium II" (1941)]
- N. N. Bogolubov, "On the theory of Superfluidity", J. Phys. (USSR) 11, 23 (1947)



Este tipo de espectro foi conjecturado por Landau (1941) para explicar as propriedades superfluidas do  $\text{He II}$ : ondas de som para  $q$  pequeno, espectro de partícula livre para  $q$  grande e um mínimo no meio (de altura  $\Delta$ ) associado a excitações chamadas de 'rotons' por Landau:



$$E(\vec{k}) = \begin{cases} \hbar v k, & \text{para } |\vec{k}| < q_0, \text{ fônons,} \\ \Delta + \frac{\hbar^2}{2m^*} (\vec{k} - \vec{q}_0)^2, & |\vec{k}| \geq q_0, \text{ rotons.} \end{cases}$$

Valores experimentais medidos para as parâmetros são  
( espalhamento de neutrons inelástico )

$$k_0 = \frac{p_0}{\hbar} = (1.92 \pm 0.01) \text{ \AA}^{-1}$$

$$\frac{\Delta}{k_B} = (8.65 \pm 0.04) \text{ }^\circ \text{K}$$

$$m^* = (0.16 \pm 0.01) m_{\text{He}^4}$$

A inclinação inicial da curva para a velocidade do som fornece

$$v \approx (239 \pm 5) \text{ [m/seg]}$$

a temperatura  $T = 1.1 \text{ }^\circ \text{K}$ .

Fonte: R. J. Donnelly, "Experimental Superfluidity",  
(Chicago Press)

## § Condição para a Superfluidez (L.D. Landau, 1941)

Mostraremos agora que o espectro de excitações obtido para o líquido de Bose implica propriedades superfluidas. O argumento é devido a Landau.

- Def. Uma maneira de definir a superfluidez:  
 "Objetos podem mover-se através do fluido sem resistência nem arrasto".

Empiricamente sabemos que esta propriedade só é válida para velocidades relativas abaixo de um determinado valor crítico.

A  $T=0^\circ\text{K}$ , o estado fundamental do superfluido é pensado como um condensado (incompleto) de Bose. Este estado fundamental é o vácuo das excitações (sejam fônons ou rotons):

$$\alpha_{\vec{k}} |\Psi_0\rangle = 0.$$

O condensado é despopulado criando excitações acima do estado fundamental, isto é

$$\alpha_{\vec{k}}^\dagger |\Psi_0\rangle = |\Psi_e; \vec{k}\rangle, \text{ com energia } E(\vec{k}).$$

Estas excitações produzem o retardamento do movimento do objeto, o qual experimenta atrito como num fluido normal.

Consideremos um objeto (ion ou neutron) de massa  $M$ , energia  $E$  e momentum  $\vec{P}$ , movimentando-se através de He II a  $T=0^\circ\text{K}$ . O corpo perderá energia e momentum para o fluido, se uma excitação de momentum  $\vec{k}$  e energia  $E(\vec{k})$  for criada. Sejam  $E'$  e  $\vec{P}'$  a energia e o momentum do objeto depois de criar uma excitação:



$$\text{conservação} \quad \begin{cases} E = E' + E(p), \\ \vec{P} = \vec{P}' + \vec{p}, \end{cases}$$

da 2ª obtemos :  $(\vec{P} - \vec{p})^2 = \vec{P}'^2$

$$\vec{P}^2 + \vec{p}^2 - 2\vec{p} \cdot \vec{P} = \vec{P}'^2 \Rightarrow \vec{p} \cdot \vec{P} = \frac{1}{2}(\vec{P}^2 + \vec{p}^2 - \vec{P}'^2).$$

Supondo que a energia da partícula-objeto é :

$$E = \text{cte.} + \frac{\vec{P}^2}{2M},$$

$$\frac{1}{2}\vec{P}^2 - \frac{1}{2}\vec{P}'^2 = M(E - E') = M E(p),$$

e assim obtemos:

$$\vec{p} \cdot \vec{P} = pP \cos \theta = \frac{\vec{P}^2}{2} + M E(p)$$

ou

$$pM V \cos \theta = \frac{p^2}{2} + M E(p)$$

$$V \cos \theta = \frac{p}{2M} + \frac{E(p)}{p}.$$

Como  $\cos \theta \leq 1$ , obtemos a condição de Landau:

$$\boxed{V \geq \frac{E(p)}{p} + \frac{p}{2M}} \quad (*)$$

Portanto, a conservação de energia e momentum fornecem uma velocidade mínima do objeto para criar uma exci-

tação de momentum  $\vec{p}$  e energia  $E(\vec{p})$  no superfluido. Para velocidades inferiores ao limite, a partícula se movimenta sem atrito. Examinemos o limite da velocidade ('crítica'). Supondo a partícula massiva, podemos negligenciar o 2do. termo em (\*)

$$V \geq \frac{E(\vec{p})}{p} \quad (**)$$

Lembramos que a energia das excitações pode ser aproximada por dois ramos: fônons e rotons.

Def. Velocidade crítica,  $V_c$

$$V_c \equiv \text{Min} \left[ \frac{E(\vec{p})}{p} \right]$$

Obtemos então, duas soluções para  $V_c$ :

(i) fônons :  $E_f(\vec{p}) = v_1 p$ ,

onde  $v_1$  é a velocidade do som ("first sound"):

$$v_1 = \left( \frac{G \eta}{m_{He}} \right)^{1/2} \approx 240 \left( \frac{m}{\text{seg}} \right).$$

Portanto, a velocidade crítica para produzir um fónon é

$$V_c = v_1.$$

Isso é, para produzir fônons no superfluido a partícula tem que movimentar-se com velocidades 'super-sônicas'.

(ii) Experimentalmente, se observa o aparecimento de atrito a velocidades muito menores, portanto devemos examinar o ramo de rotons:

$$E_r(\vec{p}) = \Delta + \frac{1}{2m^*} (p - p_0)^2$$

Em geral, procuramos o mínimo para  $\frac{E(\vec{p})}{p}$ :

$$\frac{d}{dp} \left[ \frac{E(\vec{p})}{p} \right] = 0 = \frac{p}{p^2} \left[ \frac{dE(p)}{dp} \right] - \frac{E(p)}{p^2}.$$

Notar que a relação de dispersão é isotrópica,

$$E(\vec{p}) = E(|\vec{p}|).$$

A condição de mínimo fornece:

$$\left[ \frac{dE(p)}{dp} \right] \cdot p = E(p),$$

que tem que ser resolvida para  $p$ . Uma solução trivial é a já encontrada para fônons. A construção geométrica da solução é o ponto de contato de uma reta que passa pela origem e é tangente à curva de dispersão. A solução de rotons é ligeiramente maior que  $p_0$ , que dá a posição do mínimo (ver figura anexa). - Derivando obtemos:

$$p \left( \frac{\partial E}{\partial p} \right) = p \frac{(p-p_0)}{m^*} = E(p) = \Delta + \frac{(p-p_0)^2}{2m^*},$$

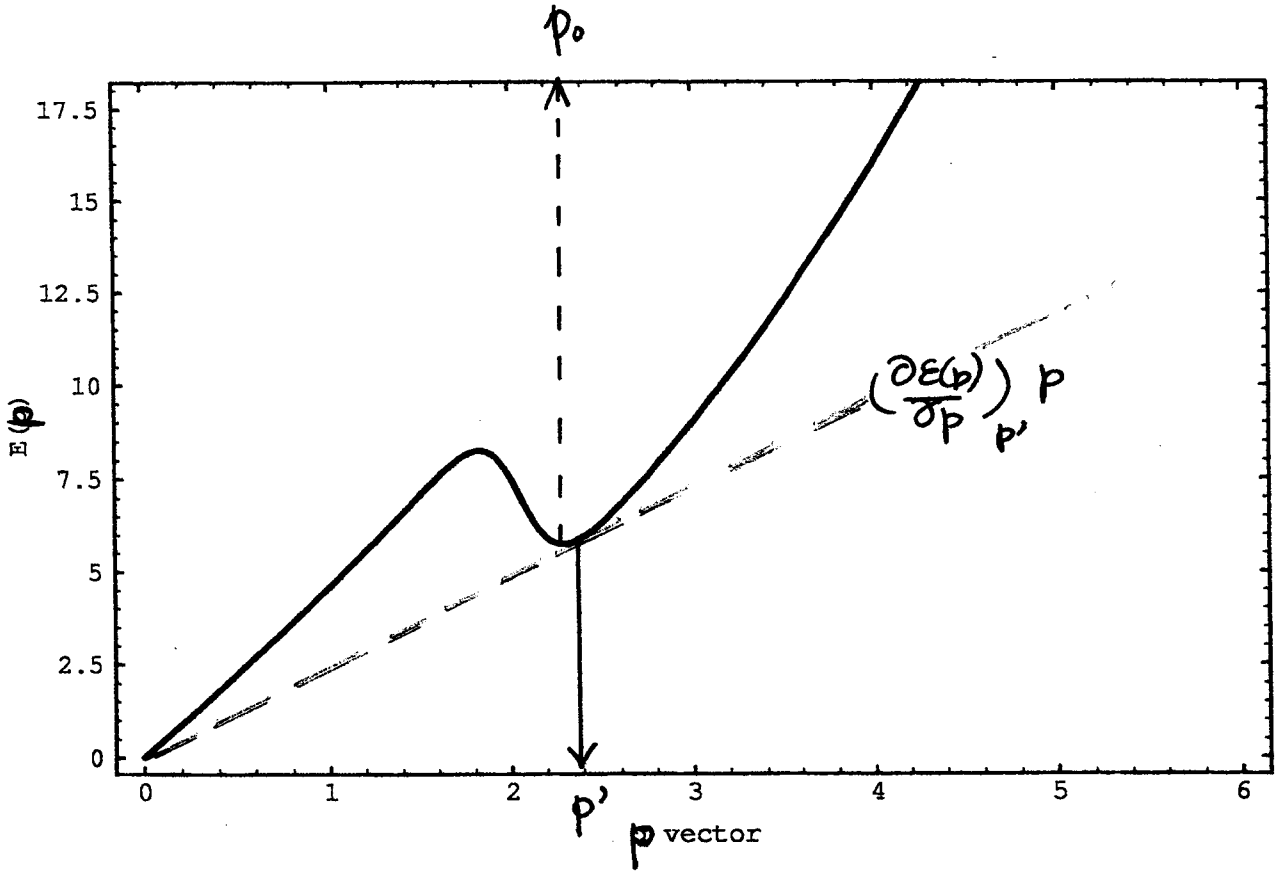
cuja solução  $p'$  é:

$$p'^2 = p_0^2 + 2m^* \Delta$$

$$p' = \sqrt{p_0^2 + 2m^* \Delta}$$

$$\left[ \frac{E(p)}{p} \right]_{\text{Min}} = \frac{\Delta}{\sqrt{p_0^2 + 2m^* \Delta}} + \frac{1}{2m^*} \frac{(\sqrt{p_0^2 + 2m^* \Delta} - p_0)^2}{\sqrt{p_0^2 + 2m^* \Delta}}.$$

Das parâmetros medidos para o He II, temos que:



$$p_0^2 \gg m^* \Delta .$$

Assim expandimos as raízes como:

$$\begin{aligned} \sqrt{p_0^2 + 2m^* \Delta} &= p_0 \sqrt{1 + \frac{2m^* \Delta}{p_0^2}} \approx p_0 \left(1 + \frac{m^* \Delta}{p_0^2}\right) \\ &\approx \frac{p_0}{1 - \frac{m^* \Delta}{p_0^2}} . \end{aligned}$$

Obtemos a velocidade crítica:

$$V_c = \left[ \frac{\mathcal{E}(p)}{p} \right]_{\min} \approx \frac{\Delta}{p_0} \left(1 - \frac{m^* \Delta}{2p_0^2}\right) \approx 50 \left(\frac{\text{m}}{\text{seg}}\right) ,$$

que está em bom acordo com o que é medido em experiências. É claro que em capilares a velocidade crítica é menor e é função do tamanho do canal.